π粒子の崩壊

$$\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$$
$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

2つの崩壊過程がある.

2つのプロセスにおいて、相互作用の形が等しいと仮定すると、

$$\mathcal{H}_{int} = \frac{if}{m_\pi} \partial_\lambda \phi_\pi \left[\bar{\Psi}_e \gamma^5 \gamma^\lambda \left[1+\gamma^5\right] \Psi_\nu \right] + H.C.$$

μも同様

e^-の計算

$$\langle f | \mathcal{H}_{int} | i \rangle = \int d^4x \langle \bar{\nu}, e^- | \frac{if}{m_\pi} \partial_\lambda \phi_\pi \left[\bar{\Psi}_e \gamma^5 \gamma^\lambda (1+\gamma^5) \Psi_\nu \right] | \pi^- \rangle$$

$$= \frac{if}{m_\pi} \int d^4x \frac{1}{\sqrt{V}} \bar{u}_e(p_e) e^{ip_e x} \gamma^5 \gamma^\lambda (1+\gamma^5) \frac{1}{\sqrt{V}} v_\nu(p_\nu) e^{ip_\nu x} \times \frac{1}{\sqrt{2\omega_\pi V}} \partial_\lambda e^{-ip_\pi x}$$

$$= \frac{if}{m_\pi \sqrt{2\omega_\pi V^3}} \int d^4x \, \bar{u}_e(p_e) e^{ip_e x} \gamma^5 \gamma^\lambda (1+\gamma^5) v_\nu(p_\nu) e^{ip_\nu x} (-i p_{\pi\lambda}) e^{-ip_\pi x}$$

$$= \frac{f}{m_\pi \sqrt{2\omega_\pi V^3}} \int d^4x \, \underbrace{p_{(\pi)\lambda} \bar{u}_e(p_e) \gamma^5 \gamma^\lambda (1+\gamma^5) v_\nu(p_\nu)}_{\boxed{A}} \exp\left\{ i(p_{(e)} + p_{(\nu)} - p_{(\pi)})x \right\}$$

この部分より
$p_\pi = p_e + p_\nu$

「
$$= -p_{(\pi)\lambda} \bar{u}_e(p_e) \gamma^\lambda (1+\gamma^5) v_\nu(p_\nu)$$
$$= -\bar{u}_e(p_e) \left(p_{(e)\lambda} \gamma^\lambda + p_{(\nu)\lambda} \gamma^\lambda \right) (1+\gamma^5) v_\nu(p_{(\nu)})$$
」

ここで運動量表示のDirac方程式を使う.

Dirac方程式

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0. \quad \to \quad \psi^+ \to \sum \frac{1}{\sqrt{V}} u(p) e^{-ipx}$$
$$\psi^- \to \sum \frac{1}{\sqrt{V}} v(p) e^{ipx}$$

それぞれの解において.

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^+ = \sum \frac{1}{\sqrt{V}} \cdot (\gamma^\mu p_\mu - m) u(p) e^{-ipx} = 0$$

$$\to \boxed{(\gamma^\mu p_\mu - m) u(p) = 0}.$$

負エネルギー解においては

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^- = \sum \frac{1}{\sqrt{V}} (-\gamma^\mu p_\mu - m) v(p) e^{ipx} = 0$$

$$\to \boxed{(\gamma^\mu p_\mu + m) v(p) = 0}$$

$$\boxed{A} = -\bar{u}_e(p_e)\left(p_{(e)\lambda}\gamma^\lambda + p_{(\nu)\lambda}\gamma^\lambda\right)(1+\gamma^5) v_\nu(p_{(\nu)})$$

$$= -m_e \bar{u}_e(p_e)(1+\gamma^5) v_\nu(p_\nu) \quad \leftarrow$$

まず, $\underline{\not{p}_\nu v_\nu = -m_\nu v_\nu = 0}$ $(m_\nu \to 0)$

電子については

$$\gamma^\mu p_\mu u_e = m_e u_e$$

Hermite conjugate

$$u_e^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 p_\mu = m_e u_e^\dagger \quad \leftarrow \text{右から}\gamma^0\text{をかける}$$

$$\underline{\bar{u}_e \gamma^\mu p_\mu = m_e \bar{u}_e}$$

ここで、π粒子の静止系を考え、反ニュートリノの運動量を$\mathbb{P}$と書く。

π粒子のエネルギーは $E_\pi = \sqrt{\mathbb{P}_\pi^2 + m_\pi^2} = m_\pi$

$\mathbb{P}_\nu = \mathbb{P}$, より

$\mathbb{P}_e = -\mathbb{P}$ となる。

エネルギー保存則

$$m_\pi = E_\pi = E_e + E_\nu = \sqrt{\mathbb{P}_e^2 + m_e^2} + \sqrt{\mathbb{P}_\nu^2 + m_\nu^2}$$ ← 2乗する。

$$m_\pi^2 = \mathbb{P}_e^2 + m_e^2 + \mathbb{P}^2 + m_\nu^2 + 2\sqrt{(\mathbb{P}^2+m_e^2)(\mathbb{P}^2+m_\nu^2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad m_\pi^2 - m_e^2 - m_\nu^2 - 2\mathbb{P}^2 = 2\sqrt{(\mathbb{P}^2+m_e^2)(\mathbb{P}^2+m_\nu^2)}$$ ← 2乗する

$$(m_\pi^2 - m_e^2 - m_\nu^2)^2 - 4\mathbb{P}^2(m_\pi - \cancel{m_e^2 - m_\nu^2}) \cancel{+ 4\mathbb{P}^4} = 4(\mathbb{P}^2+m_e^2)(\mathbb{P}^2+m_\nu^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad = \cancel{4\mathbb{P}^4} + \cancel{4\mathbb{P}^2(m_e^2+m_\nu^2)} + 4m_e^2 m_\nu^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (m_\pi^2 - m_e^2 - m_\nu^2)^2 - 4\mathbb{P}^2 m_\pi^2 = 4m_e^2 m_\nu^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\mathbb{P}^2 m_\pi^2 = (m_\pi^2 - m_e^2 - m_\nu^2)^2 - 4m_e^2 m_\nu^2$$

$$|\mathbb{P}|^2 = \frac{(m_\pi^2 - m_e^2 - m_\nu^2)^2 - 4m_e^2 m_\nu^2}{4m_\pi^2}$$

$$|\mathbb{P}| = \frac{\sqrt{(m_\pi^2 - m_e^2 - m_\nu^2)^2 - 4m_e^2 m_\nu^2}}{2m_\pi}$$

$m_\nu \to 0$ の極限をとると、

$$|\mathbb{P}| = \frac{\sqrt{(m_\pi^2 - m_e^2)^2}}{2m_\pi} = \frac{m_\pi^2 - m_e^2}{2m_\pi}$$

また、~~$E_e + |\mathbb{P}| =$~~

$$E_e = \sqrt{\mathbb{P}^2 + m_e^2} = \sqrt{\frac{(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{4m_\pi^2} + m_e^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(m_\pi^2 - m_e^2)^2 + 4m_\pi^2 m_e^2}{4m_\pi^2}} = \sqrt{\frac{(m_\pi^2 + m_e^2)^2}{4m_\pi^2}}$$

$$= \frac{m_\pi^2 + m_e^2}{2m_\pi}$$

$$E_e + |\mathbb{P}| = \frac{m_\pi^2 + m_e^2}{2m_\pi} + \frac{m_\pi^2 - m_e^2}{2m_\pi}$$

$$= \frac{2m_\pi^2}{2m_\pi} = m_\pi$$

$$\therefore \boxed{E_e + |\mathbb{P}| = m_\pi}$$

負エネルギー解について

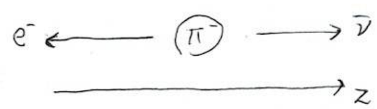
spin-up 状態では、

$$v_\nu^{(+)}(\mathbb{P}) = \sqrt{\frac{|E_{\mathbb{P}}|+m_\nu}{2|E_{\mathbb{P}}|}} \begin{pmatrix} -\dfrac{\sigma\cdot\mathbb{P}}{|E_{\mathbb{P}}|+m_\nu}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} \quad \longleftarrow \quad \sigma\cdot\mathbb{P} = \begin{pmatrix} P_3 & P_1-iP_2 \\ P_1+iP_2 & -P_3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\cdot\mathbb{P}\,\big|_{+} = \begin{pmatrix} P_3 \\ P_1+iP_2 \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{|E_{\mathbb{P}}|+m_\nu}{2|E_{\mathbb{P}}|}} \begin{pmatrix} -P_3/(|E_{\mathbb{P}}|+m_\nu) \\ -(P_1+iP_2)/(|E_{\mathbb{P}}|+m_\nu) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

電子と反ニュートリノが z軸方向に崩壊したとする.



このとき, $\mathbb{P}=(0,0,P)$ となる.

$$\to\ v_\nu^{(+)}(\mathbb{P}) = \sqrt{\frac{|E_{\mathbb{P}}|+m_\nu}{2|E_{\mathbb{P}}|}} \begin{pmatrix} -|\mathbb{P}|/(|E_{\mathbb{P}}|+m_\nu) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^5 = i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\sigma^1\\-\sigma^1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\sigma^2\\-\sigma^2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\sigma^3\\-\sigma^3&0\end{pmatrix}$$

$$= i\begin{pmatrix}0&\sigma^1\\\sigma^1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\sigma^1&0\\0&-i\sigma^1\end{pmatrix}$$

$$= i\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$(1+\gamma^5)\,v_\nu^{(+)}(\mathbb{P})$

$$= \sqrt{} \times \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -|\mathbb{P}|/(|E_{\mathbb{P}}|+m_\nu) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{} \times \begin{pmatrix} -|\mathbb{P}|/(|E_{\mathbb{P}}|+m_\nu)+1 \\ 0 \\ -|\mathbb{P}|/(|E_{\mathbb{P}}|+m_\nu)+1 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \cancel{0}$$

$$\cancel{\frac{|\mathbb{P}|}{|E_{\mathbb{P}}|+m_\nu} = \frac{|\mathbb{P}|}{\sqrt{|\mathbb{P}|^2+m_\nu^2}+m_\nu} \simeq \frac{|\mathbb{P}|}{|\mathbb{P}|} = 1}$$

~~($m_\nu \to 0$ の極限)~~

$$\frac{|\mathbb{P}|}{|E_{\mathbb{P}}|+m_\nu} = \frac{|\mathbb{P}|}{-\sqrt{|\mathbb{P}|^2+m_\nu^2}+m_\nu} \to \frac{|\mathbb{P}|}{-|\mathbb{P}|} = -1$$

$$\cancel{\to \sqrt{} \times 0 = 0}$$

$$= \sqrt{\frac{E_\nu + m_\nu}{2E_\nu}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 v_\nu^{(+)}(\mathbb{P}) \quad \to \quad \boxed{(1+\gamma^5) v_\nu^{(+)}(\mathbb{P}) = 2 v_\nu^{(+)}(\mathbb{P})}$$

spin-down 状態は

$$v_\nu^{(-)}(\mathbb{P}) = \sqrt{\frac{|E_\mathbb{P}| + m_\nu}{2|E_\mathbb{P}|}} \begin{pmatrix} -\frac{\sigma\cdot\mathbb{P}}{|E_\mathbb{P}|+m_\nu}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma\cdot\mathbb{P}\, h_- = \begin{pmatrix} P_1 - iP_2 \\ -P_3 \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{|E_\mathbb{P}| + m_\nu}{2|E_\mathbb{P}|}} \begin{pmatrix} -(P_1 - iP_2)/(|E_\mathbb{P}| + m_\nu) \\ P_3/(|E_\mathbb{P}| + m_\nu) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$m_\nu \to 0$ で -1.

$$\begin{pmatrix} \vec{P} = (0,0,P) \\ m_\nu \to 0 \end{pmatrix} \quad \sqrt{\frac{|E_P| + m_\nu}{2|E_P|}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

このとき、

$$(1+\gamma^5) v_\nu^{(-)}(\mathbb{P}) = \sqrt{} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

これより

$$\boxed{A} = -m_e \bar{u}_e(P_e)(1+\gamma^5) v_\nu(P_\nu)$$

$$= -2 m_e \bar{u}_e(P_e) v_\nu^{(+)}(P_\nu)$$

電子の正エネルギー解

spin-up の場合

$$u_e^{(+)}(-\mathbb{P}) = \sqrt{\frac{E_{\mathbb{P}}+m_e}{2E_{\mathbb{P}}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\sigma\cdot(-\mathbb{P})}{E_{\mathbb{P}}+m_e}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\sigma\cdot\mathbb{P} = \begin{pmatrix} P_3 & P_1-iP_2 \\ P_1+iP_2 & -P_3 \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{E_{\mathbb{P}}+m_e}{2E_{\mathbb{P}}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -P_3/(E_{\mathbb{P}}+m_e) \\ -(P_1+iP_2)/(E_{\mathbb{P}}+m_e) \end{pmatrix}$$

$$\sigma\cdot\mathbb{P}h_+ = \begin{pmatrix} P_3 \\ P_1+iP_2 \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{E_{\mathbb{P}}+m_e}{2E_{\mathbb{P}}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{|\mathbb{P}|}{E_{\mathbb{P}}+m_e} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(z軸方向)

spin-down の場合.

$$u_e^{(-)}(-\mathbb{P}) = \sqrt{\frac{E_{\mathbb{P}}+m_e}{2E_{\mathbb{P}_e}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{\sigma\cdot\mathbb{P}}{E_{\mathbb{P}_e}+m_e}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\sigma\cdot\mathbb{P}h_- = \begin{pmatrix} P_1-iP_2 \\ -P_3 \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{E_e+m_e}{2E_e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -(P_1-iP_2)/(E_e+m_e) \\ P_3/(E_e+m_e) \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{E_e+m_e}{2E_e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dfrac{|\mathbb{P}|}{E_e+m_e} \end{pmatrix}$$

「電子がspin-up」のとき

$$\boxed{A} = -2m_e \times \sqrt{\frac{E_e+m_e}{2E_e}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{|\mathbb{P}|}{E_e+m_e} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \sqrt{\frac{E_\nu+m_\nu}{2E_\nu}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -2m_e \cdot \sqrt{\frac{(E_e+m_e)(E_\nu+m_\nu)}{4E_eE_\nu}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{|\mathbb{P}|}{E_e+m_e} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -2m_e \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(E_e+m_e)(E_\nu+m_\nu)}{E_eE_\nu}} \left(1 + \frac{|\mathbb{P}|}{E_e+m_e}\right)$$

$$= -m_e \sqrt{\frac{(E_e+m_e)}{E_e} \underbrace{\frac{(E_\nu+m_\nu)}{E_\nu}}_{\to 1 \ (m_\nu \to 0)}} \cdot \frac{E_e+m_e+|\mathbb{P}|}{E_e+m_e}$$

$$= -m_e \frac{E_e+m_e+|\mathbb{P}|}{\sqrt{E_e(E_e+m_e)}}$$

$$= -m_e \frac{m_e+m_\pi}{\sqrt{E_e(E_e+m_e)}}$$

$$= -m_e \cdot \frac{m_e+m_\pi}{\sqrt{E_e \times \frac{(m_\pi+m_e)^2}{2m_\pi}}}$$

$$= -m_e \cdot \frac{\sqrt{2m_\pi}}{\sqrt{E_e}} = -m_e \sqrt{\frac{2m_\pi}{E_e}}$$

$$|\mathbb{P}| = \frac{m_\pi^2 - m_e^2}{2m_\pi}$$

$$E_e + |\mathbb{P}| = m_\pi$$

よって、遷移振幅は

$$\langle f|\mathcal{H}_{int}|i\rangle = \frac{f}{m_\pi\sqrt{2E_\pi V^3}}\int d^4x\left(-m_e\sqrt{\frac{2E_\pi}{E_e}}\right)\exp\left\{i\left(P_{(e)}+P_{(\nu)}-P_{(\pi)}\right)x\right\}$$

$$= \frac{-f}{m_\pi\sqrt{E_eV^3}}\int d^4x\ \exp\left\{i\left(P_{(e)}+P_{(\nu)}-P_{(\pi)}\right)x\right\}$$

$$= \frac{-fm_e}{m_\pi\sqrt{E_eV^3}}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(P_{(e)}+P_{(\nu)}-P_{(\pi)}\right)$$

2乗

$$|\langle f|\mathcal{H}_{int}|i\rangle|^2 = \frac{f^2m_e^2}{m_\pi^2E_eV^3}(2\pi)^4\lim_{t,V\to\infty}tV\,\delta^{(4)}\left(P_{(e)}+P_{(\nu)}-P_{(\pi)}\right)$$

$$= \frac{f^2m_e^2}{m_\pi^2E_eV^2}(2\pi)^4\,t\,\delta^{(4)}\left(P_{(e)}+P_{(\nu)}-P_{(\pi)}\right)$$

$\boxed{\text{確率}}$

$$C(2\to1) = \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3P_e\cdot\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3P_{(\nu)}\frac{f^2m_e^2}{m_\pi^2E_eV^2}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(P_{(e)}+P_{(\nu)}-P_{(\pi)}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3P_e\int d^3P_\nu\frac{f^2m_e^2}{m_\pi^2E_e}\delta^{(4)}\left(P_{(e)}+P_{(\nu)}-P_{(\pi)}\right)$$

$$= \frac{f^2m_e^2}{(2\pi)^2m_\pi^2}\underline{\int\frac{d^3P_{(e)}}{2E_e}\int\frac{d^3P_{(\nu)}}{2E_\nu}}\cdot4E_\nu\,\underline{\delta^{(4)}\left(P_{(e)}+P_{(\nu)}-P_{(\pi)}\right)}$$

重心系で

$$\int d\Omega\frac{\sqrt{[s-(M_1-M_2)^2][s-(M_1+M_2)^2]}}{8s}$$

$$s = M^2 = E^2$$

$$= \frac{f^2m_e^2}{(2\pi)^2m_\pi^2}\int d\Omega\frac{\sqrt{[s-(m_e-m_\nu)^2][s-(m_e+m_\nu)^2]}}{8s}\cdot4E_\nu$$

$$= \frac{f^2m_e^2}{(2\pi)^2m_\pi^2}\cdot4\pi\frac{\sqrt{[m_\pi^2-(m_e-m_\nu)^2][m_\pi^2-(m_e+m_\nu)^2]}}{8m_\pi^2}\cdot4E_\nu$$

$$E_\nu = E_\pi - E_e = m_\pi - \frac{m_\pi^2+m_e^2}{2m_\pi} = \frac{m_\pi^2-m_e^2}{2m_\pi}$$

$m_\nu\to0$ の極限をとった

$$= \frac{16\pi f^2m_e^2}{4\pi^2\cdot8m_\pi^4}\cdot(m_\pi^2-m_e^2)\cdot\frac{m_\pi^2-m_e^2}{2m_\pi}$$

$$= \frac{f^2m_e^2(m_\pi^2-m_e^2)^2}{4\pi m_\pi^5}$$

よって、

$$\frac{1}{\tau(\pi^- \to e^- + \bar{\nu}_e)} = \frac{f^2 m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)^2}{4\pi m_\pi^5}$$

同様にして

$$\frac{1}{\tau(\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu)} = \frac{f^2 m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)}{4\pi m_\pi^5}$$

$$\to \frac{\Gamma(\pi^- \to e^- + \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \frac{(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}$$

代入

π^-の質量： $m_{\pi^-} = 139.57061\ (\pm 0.00024)\ \mathrm{MeV/c^2}$ wiki

$m_{\pi^-}^2 = 1.95 \times 10^4\ [\mathrm{MeV/c^2}]^2$

電子質量： $m_e = 0.51\ \mathrm{MeV/c^2}$

$m_e^2 = 0.26\ [\mathrm{MeV/c^2}]^2$

ミューオン質量 $m_\mu = 1.06 \times 10^2\ [\mathrm{MeV/c^2}]$

$m_\mu^2 = 1.12 \times 10^4\ [\mathrm{MeV/c^2}]$

$$\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 = 2.34 \times 10^{-5}$$

$$\frac{\Gamma(\pi^- \to e^- + \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu)} = 0.000128333$$

$$\simeq 1.3 \times 10^4$$