NO.

DATE

フォトンのプロパゲーター（Coulomb part）

クーロンゲージを満たすとき、$\nabla \mathbb{A} = 0$。

A_0について、ポアソン方程式 $\nabla^2 A_0(x,t) = -\rho(x,t)$ に従うので、

$$A_0 = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{\rho(x',t')}{|x-x'|}$$

次に、電場を書き直すと、

$$\mathbb{E} = \underbrace{-\nabla A_0}_{\mathbb{E}_L} \underbrace{-\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}}_{\mathbb{E}_T}$$ これを、longitudinal part と transverse part に分解して、

$\mathbb{E}_L = -\nabla A_0$, $\mathbb{E}_T = -\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}$ とすると、 $\nabla \times \mathbb{E}_L = 0$, $\nabla \cdot \mathbb{E}_T = 0$

ここで、電磁場のハミルトニアンを考えると、

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x \left(|\mathbb{E}|^2 + |\mathbb{B}|^2\right)$$

このうち、電場の部分は、

$$\begin{aligned}
\int d^3x\, |\mathbb{E}|^2 &= \int d^3x \left\{ |\mathbb{E}_T|^2 + 2\mathbb{E}_T\cdot\mathbb{E}_L + |\mathbb{E}_L|^2 \right\} \\
&= \int d^3x \left\{ |\mathbb{E}_T|^2 - 2(\nabla A_0)\cdot\mathbb{E}_T + |\mathbb{E}_L|^2 \right\} \\
&= \int d^3x \left\{ |\mathbb{E}_T|^2 + 2A_0\underbrace{(\nabla\cdot\mathbb{E}_T)}_{0} + |\mathbb{E}_L|^2 \right\} \\
&= \int d^3x \left\{ |\mathbb{E}_T|^2 + |\mathbb{E}_L|^2 \right\}
\end{aligned}$$

← 全微分については、$A_0\mathbb{E}_T$ が r^{-5} に反比例しているので、無限遠で 0。

ここで、$\int d^3x\, |\mathbb{E}_L|^2 = \int d^3x\, (\nabla A_0)^2 = \int d^3x \left\{ \nabla\cdot(A_0\nabla A_0) - A_0\nabla^2 A_0 \right\}$

$$= \int d^3x\, \rho A_0$$

したがって、

$$H_{Coul} = \frac{1}{2}\int d^3x\, \rho A_0 = \frac{1}{2}\int d^3x_1 \int d^3x_2 \frac{\rho(x_1,t)\rho(x_2,t)}{4\pi|x_1-x_2|}$$

$$= \frac{e^2}{8\pi}\int d^3x_1 \int d^3x_2 \frac{j^0(x_1)j^0(x_2)}{|x_1-x_2|}$$