光電効果

束縛状態にある電子が光を吸収し、散乱状態に移る過程

ここでは、静止エネルギー ≫ 飛び出した電子の運動エネルギー ≫ 束縛エネルギー

つまり、$mc^2 \gg K \gg I$ を仮定する。

$$H = \frac{(\mathbb{P}-e\mathbb{A})^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} - \frac{e}{2m}\sigma\cdot\mathbb{H}$$

$$= \frac{\mathbb{P}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} - \frac{e}{m}\mathbb{P}\cdot\mathbb{A} + \frac{e^2}{2m}\mathbb{A}^2 - \frac{e}{2m}\sigma\cdot\mathbb{H}$$ であるが、

スピンを無視すると、$H_{int} = -\frac{e}{m}\mathbb{P}\cdot\mathbb{A}$.

電磁場の量子化は

$$\mathbb{A} = \sum_{\mathbb{k},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}}\varepsilon(\mathbb{k},\lambda)\left(C_{\mathbb{k},\lambda}e^{-ikx} + C^{\dagger}_{\mathbb{k},\lambda}e^{ikx}\right)$$

$$= \sum_{\mathbb{k},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}}\varepsilon(\mathbb{k},\lambda)\left(C_{\mathbb{k},\lambda}e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{x}}e^{-i\omega_k t} + C^{\dagger}_{\mathbb{k},\lambda}e^{-i\mathbb{k}\cdot\mathbb{x}}e^{i\omega_k t}\right)$$

エネルギー保存の一部に加わる。

始状態は $\langle x|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}e^{-\frac{Z}{a_0}r}C^{\dagger}_{\mathbb{k},\lambda}|0\rangle$, 終状態は $\langle x|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\mathbb{P}_f\cdot x}|0\rangle$

光子の状態

よって、$\langle f|H_{int}|i\rangle = -\frac{e}{m}\langle f|\mathbb{A}\cdot\mathbb{P}|i\rangle$

$$= -\frac{e}{m}\int d^3x\int d^3x'\langle f|x\rangle\langle x|\mathbb{A}\cdot\mathbb{P}|x'\rangle\langle x'|i\rangle$$

$$= -\frac{e}{m}\int d^3x\int d^3x'\frac{e^{-i\mathbb{P}_f\cdot x}}{\sqrt{V}}\langle 0|\left(\sum_{\mathbb{k}',\lambda'}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}V}}\varepsilon(\mathbb{k}',\lambda')C_{\mathbb{k}',\lambda'}e^{i\mathbb{k}'\cdot x'}\right)\cdot(-i\nabla')\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}e^{-\frac{Z}{a_0}r'}\right]$$
$$\times\delta^{(3)}(x-x')\,C^{\dagger}_{\mathbb{k},\lambda}|0\rangle$$

$$= -\frac{e}{m}\int d^3x\frac{e^{-i\mathbb{P}_f\cdot x}}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbb{k}',\lambda'}\delta_{\mathbb{k}'\mathbb{k}}\delta_{\lambda'\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}V}}e^{i\mathbb{k}'\cdot x}\varepsilon(\mathbb{k}',\lambda')\cdot(-i\nabla)\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}e^{-\frac{Z}{a_0}r}\right]$$

$$= -\frac{e}{m}\cdot\frac{-i}{\sqrt{2\omega_k V^2\pi}}\cdot\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\int d^3x\, e^{i(\mathbb{k}-\mathbb{P}_f)\cdot x}\varepsilon(\mathbb{k},\lambda)\cdot\nabla e^{-\frac{Z}{a_0}r}$$

$$= \frac{-ie}{m\sqrt{2\omega_k\pi V^2}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\int d^3x\,\varepsilon(\mathbb{k},\lambda)\cdot\left(i(\mathbb{k}-\mathbb{P}_f)\right)e^{i(\mathbb{k}-\mathbb{P}_f)\cdot x}e^{-\frac{Z}{a_0}r}$$

$$= \frac{-e}{m\sqrt{2\pi\omega_k V}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \left(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k},\lambda)\cdot\mathbf{p}_f\right) \int d^3x\, e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p}_f)\cdot\mathbf{x}} e^{-\frac{Z}{a_0}r}$$

ここで、

$$\int d^3x\, e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p}_f)\cdot\mathbf{x}} e^{-\frac{Z}{a_0}r} = \int_0^\infty dr\, r^2 \int_{-1}^{1} dz \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f| r z} e^{-\frac{Z}{a_0}r}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty dr\, r^2 \cdot \left[\frac{e^{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|r} - e^{-i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|r}}{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|r}\right] e^{-\frac{Z}{a_0}r}$$

$$= \frac{2\pi}{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|} \int_0^\infty dr\, r \left[e^{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|r - \frac{Z}{a_0}r} - e^{-i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|r - \frac{Z}{a_0}r}\right]$$

$$= \frac{2\pi}{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|} \int_0^\infty dr\, r \left(\frac{1}{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f| - \frac{Z}{a_0}} \left\{e^{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|r - \frac{Z}{a_0}r}\right\}' + \frac{1}{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f| + \frac{Z}{a_0}} \left\{e^{-i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|r - \frac{Z}{a_0}r}\right\}'\right)$$

$$= \frac{-2\pi}{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|} \int_0^\infty dr \left(\frac{1}{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f| - \frac{Z}{a_0}} e^{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|r - \frac{Z}{a_0}r} + \frac{1}{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f| + \frac{Z}{a_0}} e^{-i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|r - \frac{Z}{a_0}r}\right)$$

$$= \frac{-2\pi}{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|} \left(\frac{1}{\left(i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f| - \frac{Z}{a_0}\right)^2} e^{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|r - \frac{Z}{a_0}r}\Big|_0^\infty - \frac{1}{\left(i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f| + \frac{Z}{a_0}\right)^2} e^{-i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|r - \frac{Z}{a_0}r}\Big|_0^\infty\right)$$

$$= \frac{-2\pi}{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|} \cdot \left(-\frac{1}{\left(i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f| - \frac{Z}{a_0}\right)^2} + \frac{1}{\left(i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f| + \frac{Z}{a_0}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{-2\pi}{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|} \cdot \frac{\cancel{-|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|^2} - 2i\frac{Z}{a_0}|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f| + \cancel{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^2} + \cancel{|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|^2} - 2i\frac{Z}{a_0}|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f| - \cancel{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^2}}{\left(|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|^2 + \left(\frac{Z}{a_0}\right)^2\right)^2}$$

$$= \frac{-2\pi}{i|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|} \cdot \frac{-4i\frac{Z}{a_0}|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|}{\left(|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|^2 + \left(\frac{Z}{a_0}\right)^2\right)^2}$$

$$= 8\pi \frac{Z}{a_0} \cdot \frac{1}{\left(|\mathbf{k}-\mathbf{p}_f|^2 + \left(\frac{Z}{a_0}\right)^2\right)^2}$$

よって、

$$\langle f|H_{int}|i\rangle = \frac{-e}{m\sqrt{2\pi\omega_k V^2}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}(\varepsilon(k\lambda)\cdot p_f) \times 8\pi\cdot\frac{Z}{a_0}\cdot\frac{1}{\left(|k-p_f|^2+\left(\frac{Z}{a_0}\right)^2\right)^2}$$

$$= \frac{-8\pi e}{m\sqrt{2\pi\omega_k V^2}}\cdot\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{5/2}(\varepsilon\cdot p_f)\frac{1}{\left(|k-p_f|^2+\left(\frac{Z}{a_0}\right)^2\right)^2}$$

これより

$$|\langle f|H_{int}|i\rangle|^2 = \frac{64\pi^2 e^2}{2\pi m^2\omega_k V^2}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^5(\varepsilon\cdot p_f)^2\frac{1}{\left(|k-p_f|^2+\left(\frac{Z}{a_0}\right)^2\right)^4}$$

初期状態において、電子の静止系から見ると、$v_{rel}=1$ (光速) として、

$$d\sigma = \frac{2\pi V}{v_{rel}}\cdot V\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\delta\left(\omega_k - I - \frac{p_f^2}{2m}\right)\cdot\frac{64\pi^2e^2}{2\pi m^2\omega_k V^2}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^5(\varepsilon\cdot p_f)^2\frac{1}{\left(|k-p_f|^2+\left(\frac{Z}{a_0}\right)^2\right)^4}$$

$$= d^3p_f\,\delta\left(\omega_k - I - \frac{p_f^2}{2m}\right)\cdot\frac{64\pi^2e^2}{(2\pi)^3m^2\omega_k}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^5(\varepsilon\cdot p_f)^2\frac{1}{\left((k-p_f)^2+\left(\frac{Z}{a_0}\right)^2\right)^4}$$

$$= dp_f\,p_f^2\,d\Omega\,\delta\left(\omega_k - I - \frac{p_f^2}{2m}\right)\cdot\frac{32\alpha}{m^2\omega_k}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^5(\varepsilon\cdot p_f)^2\frac{1}{\left((k-p_f)^2+\left(\frac{Z}{a_0}\right)^2\right)^4}$$

エネルギーについてのデルタ関数の処理のため、

$$dp_f = \frac{dp_f}{d\left(\frac{p_f^2}{2m}\right)}d\left(\frac{p_f^2}{2m}\right) = \frac{m}{p_f}d\left(\frac{p_f^2}{2m}\right)$$ と変形すると。 $\frac{d}{dp_f}\left(\frac{p_f^2}{2m}\right) = \frac{p_f}{m}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d\cancel{K}\,\delta(\omega_k - \underbrace{I}_{K\gg I\text{ より無視}} - K)\cdot\frac{32p_f\alpha}{m\omega_k}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^5(\varepsilon\cdot p_f)^2\frac{1}{\left((k-p_f)^2+\left(\frac{Z}{a_0}\right)^2\right)^4}$$ $\Leftarrow \frac{p_f^2}{2m}\simeq\omega_k$

$$= \frac{32p_f\alpha}{m\omega_k}(\varepsilon\cdot p_f)^2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^5\frac{1}{\left(\left(\frac{Z}{a_0}\right)^2+(k-p_f)^2\right)^4}$$

NO.

DATE

始状態の偏極の平均をとると、

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbb{k},\lambda)\cdot\mathbb{P}_f)^2 = \frac{1}{2}\cdot_{\lambda}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\mathbb{k}^2}\right)P_iP_j$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\mathbb{P}\cdot\mathbb{P}-\frac{(\mathbb{k}\cdot\mathbb{P}_f)^2}{\mathbb{k}^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\mathbb{P}_f^2-|\mathbb{P}_f|^2\cos^2\theta\right) = \frac{|\mathbb{P}_f|^2}{2}(1-\cos^2\theta)$$

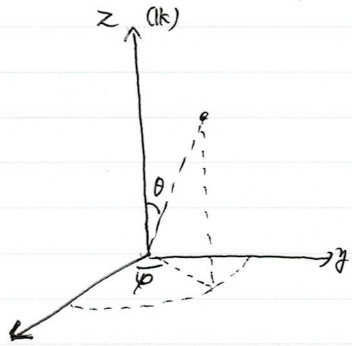
$$= \frac{\mathbb{P}_f^2}{2}(1-\cos^2\theta) = \frac{\mathbb{P}_f^2}{2}\sin^2\theta$$

これより、

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab} = \frac{16\mathbb{P}_f^3\alpha}{m\omega_k}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^5\frac{1-\cos^2\theta}{\left(\left(\frac{Z}{a_0}\right)^2+(\mathbb{k}-\mathbb{P}_f)^2\right)^4}$$

光子の入射方向をz軸方向に選ぶと、

$$(\mathbf{k}-\mathbf{p}_f)^2 = k^2+p_f^2-2kp_f\cos\theta .$$



$$k = K + I = \frac{p_f^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^2 = \frac{1}{2m}\left[p_f^2+\left(\frac{Z}{a_0}\right)^2\right]$$

よって

$$\left(\frac{Z}{a_0}\right)^2 + (\mathbf{k}-\mathbf{p}_f)^2 = \left(\frac{Z}{a_0}\right)^2 + p_f^2 + k^2 - 2kp_f\cos\theta$$

$$= 2mk + k^2 - 2kp_f\cos\theta$$

$$= 2mk\left(1+\frac{k}{2m}-\frac{p_f}{m}\cos\theta\right)$$

$$\simeq 2mk\left(1-v_f\cos\theta\right)$$

$p_f^2 \simeq 2mk \gg k^2$ より

$\frac{k}{2m} \ll 1$

これより

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{16p_f^3\alpha}{mk}\cdot\left(\frac{Z}{a_0}\right)^5\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{16m^4k^4\left(1-v_f\cos\theta\right)^4}$$

$$= \frac{\alpha p_f^3}{m^5k^5}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^5\frac{1-\cos^2\theta}{(1-v_f\cos\theta)^4}$$

$$= \frac{\alpha\cdot 2\sqrt{2}\,m^{3/2}k^{3/2}}{m^5k^5}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^5\frac{1-\cos^2\theta}{(1-v_f\cos\theta)^4}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,\alpha}{(mk)^{7/2}}\cdot\left(\frac{Z}{a_0}\right)^5\frac{1-\cos^2\theta}{(1-v_f\cos\theta)^4}$$