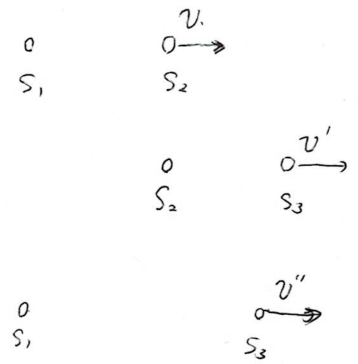
2023/1/29

速度の合成

慣性系 S_1, S_2, S_3 が、S_2 が S_1 から見て v、S_3 が S_2 から見て v' で動いたとする。

S_1 から S_3 への Lorentz 変換は



$$L_{1\text{-}3} = \begin{bmatrix} \gamma' & -\gamma'\beta' \\ -\gamma'\beta' & \gamma' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma'\gamma + \gamma'\gamma\beta'\beta & -\gamma'\gamma\beta - \gamma'\gamma\beta' \\ -\gamma'\gamma\beta' - \gamma'\gamma\beta & +\gamma'\gamma\beta'\beta + \gamma'\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma\gamma'(1+\beta\beta') & -\gamma\gamma'(\beta+\beta') \\ -\gamma\gamma'(\beta+\beta') & \gamma\gamma'(1+\beta\beta') \end{bmatrix}$$

S_3 が S_1 に対して v'' で動いているとすると、

$$L_{1\text{-}3} = \begin{bmatrix} \gamma'' & -\gamma''\beta'' \\ -\gamma''\beta'' & \gamma'' \end{bmatrix}$$

比較

★ $\underbrace{\gamma'' = \gamma\gamma'(1+\beta\beta')}_{Ⓐ}$, $\underbrace{\gamma''\beta'' = \gamma\gamma'(\beta+\beta')}_{Ⓑ}$ ← $\frac{Ⓑ}{Ⓐ}$ する

これより

$$\boxed{\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'}}$$