光のドップラー効果

$k\cdot x = \omega ct - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$ が Lorentz 不変.

$\Downarrow$

$$k'\cdot x' = \omega' ct' - k_x' x' - k_y' y' - k_z' z'$$

「x 方向に v で動いている状況を考える.」

$$= \omega'(\gamma ct - \gamma\beta x) - k_x'(-\gamma\beta ct + \gamma x) - k_y' y' - k_z' z'$$

$$= \gamma(\omega' + k_x'\beta) ct - \gamma(\omega'\beta + k_x') x - k_y' y - k_z' z$$

$$= \omega ct - k_x x - k_y y - k_z z$$

比較

Lorentz 変換

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\begin{cases} ct' = \gamma ct - \gamma\beta x \\ x' = -\gamma\beta ct + \gamma x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma(\omega' + k_x'\beta) = \omega \\ \gamma(\omega'\beta + k_x') = k_x \\ k_y' = k_y, \quad k_z' = k_z \end{cases} \iff \begin{cases} \omega' + k_x'\beta = \dfrac{\omega}{\gamma} & \cdots ① \\ \omega'\beta + k_x' = \dfrac{k_x}{\gamma} \rightarrow \omega'\beta^2 + k_x'\beta = \dfrac{k_x\beta}{\gamma} & \cdots ② \end{cases}$$

① − ②

$$\omega'(1-\beta^2) = \frac{\omega - k_x\beta}{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega'}{\gamma^2} = \frac{\omega - k_x\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \omega' = \gamma(\omega - k_x\beta)$$

$$k_x' = \frac{k_x}{\gamma} - \omega'\beta = \frac{k_x}{\gamma} - \gamma\beta(\omega - k_x\beta)$$

$$= -\gamma\beta\omega + \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma\beta^2\right) x$$

$$= -\gamma\beta\omega + \gamma x$$

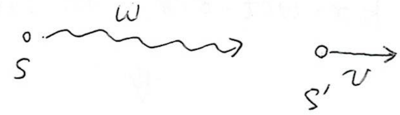
$$1 + \gamma^2\beta^2 = \frac{1-\beta^2+\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta^2} = \gamma^2$$

$$\frac{1}{\gamma} + \gamma\beta^2 = \frac{1+\gamma^2\beta^2}{\gamma} = \gamma.$$

$$\therefore \boxed{\begin{pmatrix} \omega' \\ k_x' \\ k_y' \\ k_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}}$$

☆ 光源から速度vで遠ざかるとき、観測者が見る光の振動数

フォトンの分散関係より　$k^2=0$



x方向のみ考える場合，$\omega^2-k_x^2=0 \Rightarrow k_x=\omega$

これより．$\omega' = \gamma\omega - \gamma\beta k_x = \dfrac{\omega-\beta k_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$= \frac{\omega-\beta\omega}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \frac{\omega(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \frac{\omega\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} \qquad \therefore \boxed{\omega' = \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}$$

← ωより小さくなる

⇒ 赤方偏移

☆ 光源に速度vで近づくとき、観測者が見る振動数

$\beta \to -\beta$と置き換えて．

$$\boxed{\omega' = \omega\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}$$

← $\omega' > \omega$ となる

⇒ 青方偏移．