Lorentz 変換

2つの要請

① 物理法則は全ての慣性系の観測者に対して同じ形に表される。

② 光速は全ての慣性系の観測者に対して同じ ＝ 光速度不変

不変時空間隔の2乗は慣性系に依らない。

$$(ds)^2 = c^2dt^2 - (dx^2+dy^2+dz^2)$$

Lorentz 変換の導出

S′系に対して S系が x方向に速度 v で動いているとする。

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ct' = a_1 ct + a_2 x \\ x' = b_1 ct + b_2 x \end{cases}$$

$x'=0$ (S′系の原点) に乗ると、$x = vt$ であるため、

$$0 = b_1 ct + b_2 x = b_1 ct + b_2 vt$$
$$= (b_1 c + b_2 v)t$$
$$\therefore \frac{b_1}{b_2} = -\frac{v}{c}$$

これより、$x' = b_2\left(x + \frac{b_1}{b_2}ct\right) = b_2\left(x - \frac{v}{c}\cdot ct\right)$

$$= b_2(x - vt)$$

$(ds)^2$ は慣性系によらない。

$$\Rightarrow (ct')^2 - x'^2 = (a_1 ct + a_2 x)^2 - b_2^2 (x - vt)^2$$

$$= a_1^2 c^2 t^2 + 2ca_1 a_2 tx + a_2^2 x^2 - b_2^2 x^2 + 2b_2^2 vtx - b_2^2 v^2 t^2$$

$$= (a_1^2 c^2 - b_2^2 v^2) t^2 + 2(a_1 a_2 c + b_2^2 v) tx + (a_2^2 - b_2^2) x^2$$

比較

$$= c^2 t^2 - x^2$$

$$\begin{cases} a_1^2 c^2 - b_2^2 v^2 = c^2 & \cdots ① \\ a_1 a_2 c + b_2^2 v = 0 & \cdots ② \\ a_2^2 - b_2^2 = -1 & \cdots ③ \end{cases}$$

$②^2$ より $a_1^2 a_2^2 c^2 = b_2^4 v^2$ ← ① を代入

↓

$a_2^2 (c^2 + b_2^2 v^2) = b_2^4 v^2$ ← ③を代入して a_2^2 を消去

↓

$$(c^2 + b_2^2 v^2)(b_2^2 - 1) = b_2^4 v^2$$

$$\cancel{b_2^4 v^2} - b_2^2 v^2 + b_2^2 c^2 - c^2 = \cancel{b_2^4 v^2}$$

$$b_2^2 (c^2 - v^2) = c^2.$$

$$b_2^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad \therefore \boxed{b_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$a_2^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 = \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow a_2 = \pm \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$a_1^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} b_2^2 = 1 - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow a_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$ と選ぶ.

$$a_2 = -\frac{b_2^2 v}{a_1 c} = \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad b_1 = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

したがって,

Lorentz 変換

$$\boxed{\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}}$$