「相対論的量子力学」西島、P.127.

散乱の一般論.

Schrödinger 方程式を解くと、一般に束縛状態と散乱状態が得られる。

境界条件をどのように設定するか? が重要.

散乱問題の場合、境界条件は $\boxed{\text{因果律}}$ を用いて設定される。

Stueckelberg の因果律の一種の変形

巨視的因果律と呼ばれる。

⇒ ポテンシャル V を時間 t の関数 $V(t)$ としたとき、$t<T$ で $V(t)=0$ なら

$\psi_{scatt}(t) = 0 \quad (t<T)$.

ポテンシャル導入前は散乱波なし.

断熱仮説が成り立つと、$T \to -\infty$ の極限をとれる。

Schrödinger 方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = \{H_0 + V(t)\}\psi(t), \qquad V(t) = \begin{cases} V & (t>T) \\ 0 & (t<T) \end{cases}$$

$t<T$ に対して.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = H_0 \psi(t)$$

← 散乱を受けないので入射波 $\psi_{in}(t)$ と表す。

全ての時間では

$$\psi(t) = \psi_{in}(t) + \psi_{scatt}(t) \xrightarrow{\text{代入}} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = \{H_0 + V(t)\}\psi(t)$$

$$\Downarrow$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi_{in}(t) + \psi_{scatt}(t)\right) = \{H_0 + V(t)\}\left(\psi_{in}(t) + \psi_{scatt}(t)\right)$$

$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi_{in}(t) = H_0 \psi_{in}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi_{scatt}(t) = H_0 \psi_{scatt}(t) + V(t)\psi(t)$$

$$\therefore \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_0\right)\psi_{scatt}(t) = V(t)\psi(t)$$

因果律によって、$t<T$ で $\psi_{scatt}(t)=0$.
境界条件

これを満たす Green 関数を導入する

$$
\begin{cases}
\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H_0\right)K_{ret}(t,x;t',x') = \delta(t-t')\delta^{(3)}(x-x') \\
K_{ret}(t,x;t',x') = 0 \quad (t<t')
\end{cases}
$$

Remember

微分方程式 $\mathcal{L}u=f$ に対して、グリーン関数

$$\mathcal{L}G = \delta^{(4)}(x-x')$$ を考えると

$$u = \int d^4x' \, G(x,x') f(x')$$ と書ける

自身を含んでいるが大丈夫か？

$$\underset{\mathcal{L}}{\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H_0\right)}\underset{u}{\psi_{scatt}} = \underset{f}{V(t)\psi(t)}$$

よって、Schrödinger 方程式の形式解は

$$\psi_{scatt}(t,x) = \int d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, K_{ret}(t,x;t',x') V_{t'}(x') \psi(t',x')$$

$T\to-\infty$ とすると、$V(t,x)$ の t 依存性が無くなり、位置のみの関数となり、

$$\psi_{scatt}(t,x) = \int d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, K_{ret}(t,x;t',x') V(x') \psi(t',x')$$ ← ψ_{in} を加える

$$\psi(t,x) = \psi_{in}(t,x) + \int d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, K_{ret}(t-t';x-x') V(x') \psi(t',x')$$

H_0 が t, x に陽に依存しないとき、
$K(t,x;t',x') = K(t-t';x-x')$

ここで、

$$\psi_{in}(t,x) = e^{-iEt}\psi_{in}(x), \quad \psi(t,x) = e^{-iEt}\psi(x)$$

と書くと、

$$e^{-iEt}\psi(x) = e^{-iEt}\psi_{in}(x) + \int d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, K_{ret}(t-t'; x-x') V(x') e^{-iEt'}\psi(x')$$

$$\psi(x) = \psi_{in}(x) + \int d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, e^{iE/\hbar \cdot (t-t')} K_{ret}(t-t'; x-x') V(x') \psi(x')$$

$$= \psi_{in}(x) + \int d^3x' \, G(x-x'; E) V(x') \psi(x')$$

つまり、

$$\boxed{\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_{in}(x) + \int d^3x' \, G(x-x'; E) V(x') \psi(x') \\ G(x-x'; E) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, e^{i\frac{E}{\hbar}(t-t')} K_{ret}(t-t'; x-x') \end{aligned}}$$

Gの形を求めるため、K_{ret}を求める。

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_0\right) K_{ret} = \delta(t-t')\delta^{(3)}(x-x')$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} dE \int d^3p \, \exp\left\{-iE(t-t') + i\mathbb{P}\cdot(x-x')\right\}$$

ここで、

$$K_{ret}(t-t'; x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} dE \int d^3p \, \exp\left\{-i\frac{E}{\hbar}(t-t') + i\frac{\mathbb{P}}{\hbar}\cdot(x-x')\right\} K_{ret}(E, \mathbb{P})$$

と変換し、$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$を適用すると、

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right) K_{ret}(t-t'; x-x') = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE}{2\pi}\int\frac{d^3\mathbb{P}}{(2\pi)^3}\left(E - \frac{\mathbb{P}^2}{2m}\right)\exp\left\{-i\frac{E}{\hbar}(t-t') + i\frac{\mathbb{P}}{\hbar}\cdot(x-x')\right\} \times K_{ret}(E, \mathbb{P})$$

比べると、 $\left(E - \frac{\mathbb{P}^2}{2m}\right) K_{ret}(E,\mathbb{P}) = 1$, $\therefore \boxed{K_{ret}(E,\mathbb{P}) = \frac{1}{E - \mathbb{P}^2/2m}}$

よって、

$$\boxed{K_{ret}(t-t';x-x') = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE}{2\pi}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{\exp\left\{-i\frac{E}{\hbar}(t-t')+i\frac{p}{\hbar}\cdot(x-x')\right\}}{E-p^2/2m}}$$

$$G(x-x';E) = \int_{-\infty}^{\infty}dt'\,e^{i\frac{E}{\hbar}(t-t')}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE'}{2\pi}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{\exp\left\{-i\frac{E'}{\hbar}(t-t')+i\frac{p}{\hbar}\cdot(x-x')\right\}}{E'-\frac{p^2}{2m}}$$

ここで、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dt'\,e^{i\frac{(E-E')}{\hbar}(t-t')} = e^{i\frac{E-E'}{\hbar}t}\cdot 2\pi\delta(E-E')$ より

$$G(x-x';E) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE'}{\cancel{2\pi}}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{i\frac{E-E'}{\hbar}t}\cdot\cancel{2\pi}\delta(E-E')\,\frac{\exp\left\{i\frac{p}{\hbar}\cdot(x-x')\right\}}{E'-\frac{p^2}{2m}}$$

$$= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{\exp\left\{i\frac{p\cdot(x-x')}{\hbar}\right\}}{E-\frac{p^2}{2m}}$$

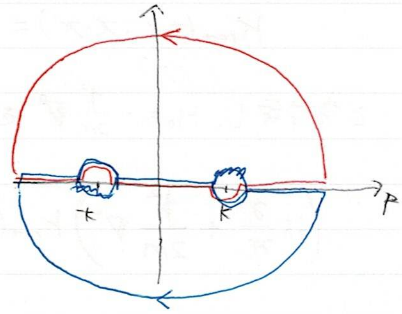
$$= \int_0^{\infty}\frac{dp\,p^2}{(2\pi)^3}\cdot\int_{-1}^{1}dz\int_0^{2\pi}d\varphi\,\frac{\exp\left\{i\frac{prz}{\hbar}\right\}}{E-\frac{p^2}{2m}}$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{dp\,p^2}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{E-\frac{p^2}{2m}}\left[\frac{\hbar\left(e^{i\frac{p}{\hbar}r}-e^{-i\frac{p}{\hbar}r}\right)}{ipr}\right] \qquad r=|x-x'|$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{dp\,p\,\hbar}{i(2\pi)^2r}\cdot\frac{e^{i\frac{p}{\hbar}r}-e^{-i\frac{p}{\hbar}r}}{E-\frac{p^2}{2m}}$$

$$= \frac{\hbar}{i2\cdot(2\pi)^2r}\int_{-\infty}^{\infty}dp\,p\,\frac{e^{i\frac{p}{\hbar}r}-e^{-i\frac{p}{\hbar}r}}{E-\frac{p^2}{2m}} \qquad ,\ E=\frac{k^2}{2m}\ とおく.$$

$$= \frac{\hbar}{2i(2\pi)^2r}\int_{-\infty}^{\infty}dp\,p\cdot\frac{e^{i\frac{p}{\hbar}r}-e^{-i\frac{p}{\hbar}r}}{\frac{k^2-p^2}{2m}}$$



$$= \frac{2m\hbar}{2i(2\pi)^2r}\int_{-\infty}^{\infty}dp\,p\,\frac{e^{i\frac{p}{\hbar}r}-e^{-i\frac{p}{\hbar}r}}{(k+p)(k-p)}$$

$$= \frac{m\hbar}{i(2\pi)^2r}\oint_C dp\,p\,\frac{e^{i\frac{p}{\hbar}r}-e^{-i\frac{p}{\hbar}r}}{(k+p)(k-p)}$$

$$= \frac{-m\hbar}{i(2\pi)^2r}\left[2\pi i k\frac{e^{i\frac{k}{\hbar}r}}{2k}+2\pi i\,\frac{-k\cdot e^{i\frac{k}{\hbar}r}}{-2k}\right] = \frac{-m\hbar\,e^{i\frac{k}{\hbar}r}}{2\pi r}$$

よって、

$$G(x-x';E) = -\frac{m\hbar}{2\pi}\frac{e^{i\frac{k}{\hbar}|x-x'|}}{|x-x'|}$$

したがって、

$$\cancel{\psi(x) = \psi_{in}(x) - \frac{m\hbar}{2\pi}\frac{e^{i\frac{k}{\hbar}|x-x'|}}{|x-x'|}}$$

$$\boxed{\psi(x) = \psi_{in}(x) - \frac{m\hbar}{2\pi}\int d^3x' \frac{e^{i\frac{k|x-x'|}{\hbar}}}{|x-x'|} V(x')\psi(x')}$$

~~Born 近似~~

波動関数の漸近形

Rを力の到達距離としたとき、$|x| \gg R > |x'|$ に対して $\frac{|x'|}{|x|}$ で展開お。

$$\psi(x) = \psi_{in}(x) - \frac{m\hbar}{2\pi}\int d^3x' \frac{e^{i\frac{k}{\hbar}|x|\left|1-\frac{|x'|}{|x|}\right|}}{|x|\left|1-\frac{|x'|}{|x|}\right|} V(x')\psi(x')$$

$$\simeq \psi_{in}(x) - \frac{m\hbar\, e^{i\frac{k}{\hbar}|x|}}{2\pi|x|}\int d^3x' \, e^{-i\frac{k_f\cdot x'}{\hbar}} V(x')\psi(x')$$

$$\left(k_f = \frac{kx}{|x|} \right)$$

$$|x-x'| = \sqrt{(x-x')^2}$$
$$= \sqrt{x^2 - 2x\cdot x' + x'^2}$$
$$= |x|\sqrt{1 - 2\frac{x\cdot x'}{|x|^2} + \frac{|x'|^2}{|x|^2}}$$
$$\simeq |x|\left(1 - \frac{x\cdot x'}{|x|^2}\right)$$

$\psi_{in}(x) = e^{ikz}$ とおくと、

$$\boxed{\begin{aligned} \psi &\simeq e^{ikz} + \frac{e^{i\frac{k}{\hbar}r}}{r} f(\theta) \\ f(\theta) &= -\frac{m\hbar}{2\pi}\int d^3x' \, e^{-i\frac{k_f\cdot x'}{\hbar}} V(x')\psi(x') \end{aligned}}$$

NO.

DATE

Born近似

- ポテンシャルが弱い
- 高エネルギー

のとき、1回だけ散乱されると考えられ、

$\psi(x) = \psi_{in}(x)$ で近似できる。

このとき、

$$\boxed{f(\theta) \simeq -\frac{m\hbar}{2\pi}\int d^3x\, e^{i(\mathbf{k}_i-\mathbf{k}_f)\cdot x/\hbar}\, V(x)} \qquad \left(\psi_{in} = e^{i\mathbf{k}_i\cdot x/\hbar}\right)$$

断面積の定義

㊟ 西島「相対論的量子力学」p.55.

散乱において、波動関数の漸近形は

$$\psi = e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

と書ける。入射波の速度を $v = \frac{k}{m}$ とすると、これは単位時間あたりに単位面積を通過する粒子数より、

$$\boxed{N = v = \frac{k}{m}}$$

粒子の生成・消滅がない場合

$\int d^3x\, \psi^* \psi = 1$ より

$$0 = \partial_t \int d^3x\, \psi^* \psi$$

$$= \int d^3x \left(\partial_t \psi^* \psi + \psi^* \partial_t \psi\right)$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \int d^3x \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi\right]$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \int d^3x\, \nabla \cdot \left[\nabla \psi^* \psi - \psi^* \nabla \psi\right]$$

$$\therefore\ j = \frac{i\hbar}{2m} \left(\nabla \psi^* \psi - \psi^* \nabla \psi\right)$$

入射波について、

$\partial_z \psi = ik e^{ikz}$ より

$$j_z = \frac{i\hbar}{2m}\left(-ik e^{-ikz} e^{ikz} - e^{-ikz} \cdot ik e^{ikz}\right)$$

$$= \frac{\hbar k}{m} = \frac{p_z}{m} = v_z$$

j は、まさに単位時間に単位面積を通過する粒子数を表す。

$$\Rightarrow N = v_z = \frac{k}{m}.$$

同様に、散乱波に対しては $\psi_{scatt} = \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta)$ として

$$\partial_r \psi_{scatt} = ik \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) - \frac{e^{ikr}}{r^2} f(\theta) = \left(ik - \frac{1}{r}\right) \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta)$$

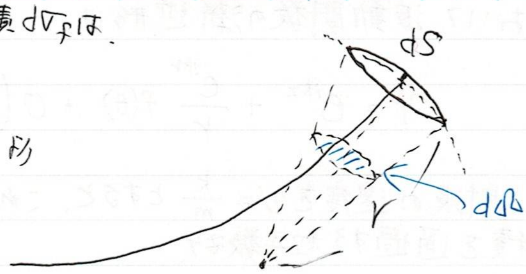
$$j_r = \frac{i\hbar}{2m}\left[\left(-ik - \frac{1}{r}\right) \frac{\cancel{e^{-ikr}}}{r} f^*(\theta) \frac{\cancel{e^{ikr}}}{r^2} f(\theta) - \frac{\cancel{e^{-ikr}}}{r} f^*(\theta) \left(ik - \frac{1}{r}\right) \frac{\cancel{e^{ikr}}}{r} f(\theta)\right]$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left[\left(-ik - \cancel{\frac{1}{r}}\right) \frac{1}{r^2} |f(\theta)|^2 - \left(ik - \cancel{\frac{1}{r}}\right) \frac{1}{r^2} |f(\theta)|^2\right]$$

$$= \frac{2\hbar k}{2m} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} = \frac{p_z}{m} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} = N \frac{|f(\theta)|^2}{r^2}$$

入射粒子が立体角$d\Omega$の方向に散乱されるときの断面積$d\sigma_f$は、

$$d\sigma_f = \frac{\text{単位時間・単位面積あたりに}d\Omega\text{に散乱された粒子数}}{\text{単位時間・単位面積あたりの入射粒子数}}$$ より



$$j_z\, d\sigma_f = \lim_{r\to\infty} j_r\, dS = \lim_{r\to\infty} r^2 j_r\, d\Omega$$

$$= \lim_{r\to\infty} r^2 \cdot N \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} d\Omega$$

$$= N|f(\theta)|^2 d\Omega$$

したがって、微分散乱断面積は

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma_f}{d\Omega}\right) = |f(\theta)|^2}$$