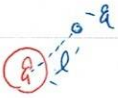
双極子



物質が分極した状態では、遠方から見て、q と $-q$ の2つの点電荷が距離 l を隔てて並んでいるのに等しい。

原子の中での電荷密度が $\rho(x,y,z)$ で表されるとすると、ある点 $P(x,y,z)$ での電位は

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\eta)^2}}$$

⇓ (x,y,z) を中心に Taylor 展開

$$\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\fallingdotseq\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2(-x\xi-y\eta-z\zeta)}{\{(x^2+y^2+z^2)\}^{3/2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\right)$$

$$=\left.\frac{2(\xi-x)}{-2\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{3/2}}\right|_{\xi=0}$$

$$=\frac{x}{\left[x^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}$$

よって、
$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\rho(\xi,\eta,\zeta)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)d\xi d\eta d\zeta$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,d\xi d\eta d\zeta$$ ← 全体では中性となるので、0.

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left[x\int_V\xi\rho(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta+y\int_V\eta\rho(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta+z\int_V\zeta\rho(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{P_x x+P_y y+P_z z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathbb{P}\cdot\mathbb{r}}{r^3}$$

$$P_x=\int_V\xi\rho(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta$$

双極子の電位 $V=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbb{P}\cdot\mathbb{r}}{r^3}$

双極子モーメント $\mathbb{P}=(P_x,P_y,P_z)$

もし $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ に $+q$, $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ に $-q$ の点電荷がある場合 $\boxed{\rho = q\delta\left(x-\frac{a}{2}\right)\delta\left(y-\frac{b}{2}\right)\delta\left(z-\frac{c}{2}\right) - q\delta\left(x+\frac{a}{2}\right)\delta\left(y+\frac{b}{2}\right)\delta\left(z+\frac{c}{2}\right)}$

$$\therefore P_x = \int d^3x \left\{ q\delta\left(x-\frac{a}{2}\right)\delta\left(y-\frac{b}{2}\right)\delta\left(z-\frac{c}{2}\right) - q\delta\left(x+\frac{a}{2}\right)\delta\left(y+\frac{b}{2}\right)\delta\left(z+\frac{c}{2}\right) \right\} x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ q\delta\left(x-\frac{a}{2}\right) - q\delta\left(x+\frac{a}{2}\right) \right\} x =$$

$$= q\cdot\frac{a}{2} - q\cdot\left(-\frac{a}{2}\right) = aq.$$

y, z も同様にすると、$P_y = bq$, $P_z = cq$. $\Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbb{P}\cdot\mathbb{r}}{r^3}$ は双極子がつくるポテンシャル、

∴ 双極子モーメントの大きさは

$$|\mathbb{P}| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\, q = lq$$

$\boxed{\text{双極子モーメントの性質}}$

原子が電気的に中性である限り、双極子モーメントは座標原点のとり方に依らない。

$x = x' + x_0$ とおくと、$dx = dx'$

$$\int d^3x\, x\rho(x,y,z) = x_0 \underbrace{\int d^3x\, \rho(x,y,z)}_{0} + \int d^3x\, x'\rho(x,y,z)$$

$$= \int d^3x'\, x'\rho(x',y',z')$$