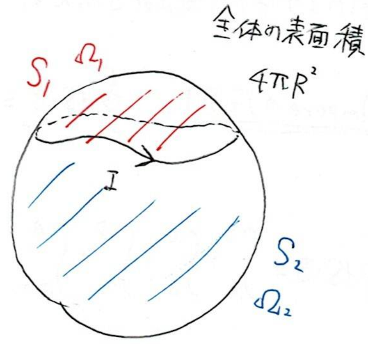
2022/12/26

Ampereの法則

電流が存在すると、その周りに磁場が生じる。



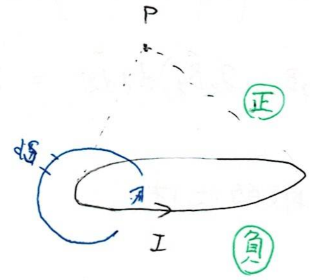
ある回路に対して、全体の表面積 $4\pi R^2$ に対し、

通常は $S_1 + S_2 = 4\pi R^2$ となる。

電流を考える場合はそれぞれの面から見た電流の向きは逆。

よって、$\boxed{S_1 - S_2 = 4\pi R^2}$ と定義する。

$\Rightarrow$ 立体角 $\Omega_1 - \Omega_2 = 4\pi$



点Pから見た磁場のポテンシャルは、その点から回路を見た立体角を用いて $V_m = CI\Omega = \frac{1}{4\pi} I\Omega$

これより、回路の正側と負側では、

$\Delta V = \frac{1}{4\pi} I(\Omega_1 - \Omega_2) = I$ となる。

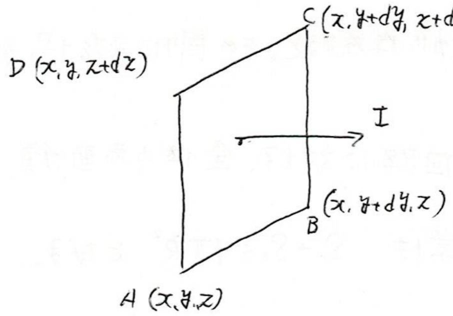
回路の表と裏でポテンシャルが I だけ不連続。

$\Rightarrow$ $\boxed{\oint dS \cdot B = nI}$ nは積分路が回路を何回巻いているかの数

磁場は、本質的にモノポールがないので、

$$\nabla\cdot B = 0.$$

右図のような閉曲線を考える。



Ampereの法則： $\oint dS\cdot B = nI,\ = I \quad (n=1)$

$$\oint dS\cdot B = \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A$$

$$= \cancel{B_y}\,dy + \left(\cancel{B_z} + \partial_y B_z\,dy\right)dz - \left(\cancel{B_y} + \partial_z B_y\,dz\right)dy - B_z\,\cancel{dz}$$

$$= \left(\partial_y B_z - \partial_z B_y\right)dy\,dz \quad = J_x\,dy\,dz$$

3次元で、一般的には、

$$\begin{cases} J_x = \partial_y B_z - \partial_z B_y \\ J_y = \partial_z B_x - \partial_x B_z \\ J_z = \partial_x B_y - \partial_y B_x \end{cases} \Rightarrow \boxed{\nabla\times B = J}$$

定常状態では正しい。

電荷密度が変化する場合、(時間で)

ある点で電荷保存するので、 $\nabla\cdot J + \frac{d\rho}{dt} = 0$ が成り立つ。(絶対!!)

Gauss's law.
$\nabla\cdot E = \rho$

よって、 $J \to J + \frac{dE}{dt}$ とすると $\nabla\cdot\left(J + \underbrace{\frac{dE}{dt}}_{\text{displacement current.}}\right) = 0$

よってAmpereの法則は変位電流を加えて、

$$\boxed{\nabla\times B = J + \frac{dE}{dt}}$$