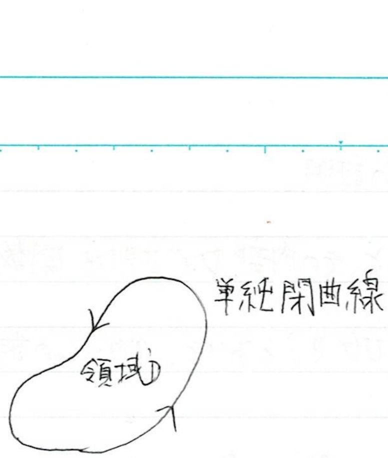
コーシーの積分定理

単純閉曲線Cで囲まれた内部の領域をDとおく。

複素関数 $f(z)$ がCおよびその内部Dで正則で、

その導関数が連続のとき、



$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 0}$$ が成り立つ

これを示すのに、グリーンの定理が必要

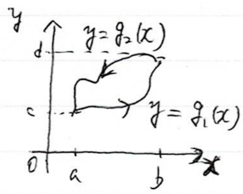
⇓

グリーンの定理

xy平面上の単純閉曲線Cで囲まれた内部の領域をDとおく。
2実数変数関数 $f(x,y)$ が、Cおよびその内部Dで連続な
偏導関数をもつとき、

$$\boxed{\begin{aligned} &① \oint_C f(x,y)\,dx = -\iint_D dx\,dy\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ &② \oint_C f(x,y)\,dy = \iint_D dx\,dy\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \end{aligned}}$$ が成り立つ。

①について、

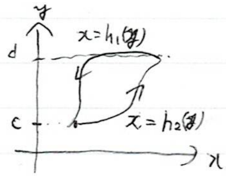


$$\oint_C dx\,f(x,y) = \int_a^b dx\,f(x,g_1(x)) + \int_b^a dx\,f(x,g_2(x))$$

$$= \int_a^b dx\left\{f(x,g_1(x)) - f(x,g_2(x))\right\}$$

$$= -\int_a^b dx\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\int_D dx\,dy\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

②も同様に



$$\oint_C dy\,f(x,y) = \int_c^d dy\,f(h_2(y),y) + \int_d^c dy\,f(h_1(y),y)$$

$$= \int_c^d dy\left\{f(h_2(y),y) - f(h_1(y),y)\right\} = +\int_c^d dy\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \int_D dy\,dx\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

コーシーの積分定理の証明.

単純閉曲線 C と、その内部 D で正則な関数 $f(z)$ を

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ とおくと、グリーンの定理より

グリーンの定理

$$\oint_C dx f(x,y) = -\int_D dxdy \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\oint_C dy f(x,y) = \int_D dxdy \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\oint_C dx\, u = -\int_D dxdy \frac{\partial u}{\partial y} = -\int dxdy\, u_y$$

$$\oint_C dy\, u = \int_D dxdy\, u_x, \quad \oint_C dx\, v = -\int_D dxdy\, v_y, \quad \oint_C dy\, v = \int_D dxdy\, v_x$$

よって.

$$\oint_C dz f(z) = \oint_C (dx + i dy)(u + iv)$$

$$= \oint_C dx\, u + i\oint_C dy\, u + i\oint_C dx\, v - \oint_C dy\, v$$

$$= -\int_D dS\, u_y + i\int_D dS\, u_x - i\int_D dS\, v_y - \oint_D dS\, v_x$$

$$= -\int_D dS\, (\underbrace{u_y + v_x}_{0}) + i\int_D dS\, (\underbrace{u_x - v_y}_{0})$$

$$= 0.$$

コーシー・リーマンの方程式

$f(z) = u + iv$ が正則のとき、

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y$$

以上より. $\oint_C dz f(z) = 0.$

コーシーの積分公式

まず、以下の計算を行う。

積分路 C: $|z|=r$ (r: 正の定数) であり、nを整数とするとき、

$$\int_C dz\, z^n \quad は？$$

$n\neq -1$のとき　$z=re^{i\theta}$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$

$$\int_C dz\, z^n = i\int_0^{2\pi} d\theta\, re^{i\theta}\cdot r^n e^{in\theta}$$

$$= ir^{n+1}\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{i(n+1)\theta} = ir^{n+1}\left[\frac{1}{i(n+1)}e^{i(n+1)\theta}\right]_0^{2\pi}$$

$$= ir^{n+1}\frac{1}{i(n+1)}\cdot\left(e^{i(n+1)\cdot 2\pi} - e^{i(n+1)\cdot 0}\right) = 0.$$

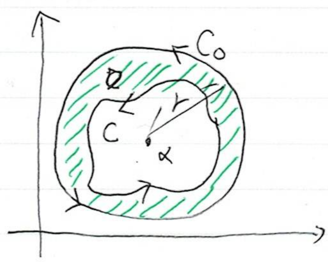
$n=-1$のとき、

$$\int_C dz\, z^{-1} = i\int_0^{2\pi} d\theta\, re^{i\theta}\cdot r^{-1}e^{-i\theta}$$

$$= i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \quad \rightarrow \quad \boxed{\int_C dz\,\frac{1}{z} = 2\pi i.}$$

同様に、 $\boxed{\int_C dz\,\frac{1}{z-\alpha} = 2\pi i}$ ($|z-\alpha|=r$ に沿って)

任意の閉曲線 C のまわりではどうか？



コーシーの積分定理により、正則な領域Dで $\oint_C dz\, f(z)=0$ より

$$\oint_C dz\,\frac{1}{z-\alpha} - \oint_{C_0} dz\,\frac{1}{z-\alpha} = 0.$$

$$\therefore \oint_C dz\,\frac{1}{z-\alpha} = \oint_{C_0} dz\,\frac{1}{z-\alpha} = 2\pi i.$$

よって任意の閉曲線で

$$\boxed{\oint_C dz\,\frac{1}{z-\alpha} = 2\pi i}$$

周回積分公式.

$$\oint_C dz \frac{f(z)}{z-\alpha} = \oint_C dz \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} + \oint_C dz \frac{f(\alpha)}{z-\alpha}$$

$$= \oint_C dz \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} + 2\pi i f(\alpha).$$

複素積分の性質

$$\left| \oint_C g(z)dz \right| \leqq M \cdot L$$

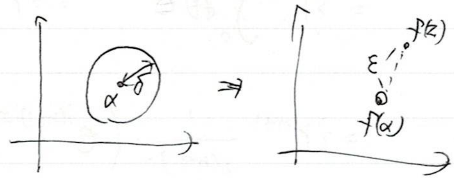
M：$|g(z)|$の最大値

L：曲線Cの長さ

コーシーの積分定理より

$$\oint_C dz \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} = \oint_{C_0} dz \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}$$

C_0：$|z-\alpha| = \delta$



$$\left| \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} \right| = \frac{|f(z)-f(\alpha)|}{|z-\alpha|} \leqq \frac{\varepsilon}{\delta}$$

よって

$$\left| \oint_{C_0} dz \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon \to 0$$

よって

$$\left| \oint_C dz \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} \right| = 0. \quad \therefore \oint_C dz \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} = 0$$

$$\therefore \boxed{\oint_C dz \frac{f(z)}{z-\alpha} = 2\pi i f(\alpha)}$$

コーシーの積分公式.