2023/1/7

ヘルムホルツ方程式の解

$$(\nabla^2+k^2)\,u(\mathbf{r})=0$$

↓ これに対するグリーン関数

$$(\nabla^2+k^2)\,G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

それぞれのフーリエ変換を考える

$$G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{p}\,\exp[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\,G_0(\mathbf{p})$$

微分演算子を作用 ↓

$$(\nabla^2+k^2)\,G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{p}\,(-\mathbf{p}^2+k^2)\underbrace{\exp[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\,G_0(\mathbf{p})}_{=-1}$$

デルタ関数

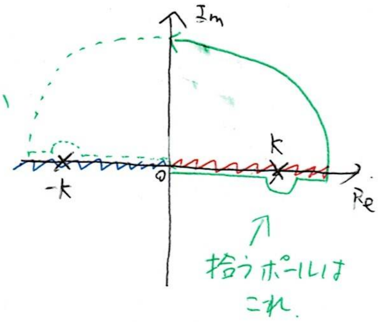
$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{p}\,\exp[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]$$

比較

$$(-\mathbf{p}^2+k^2)\,G_0(\mathbf{p})=-1 \qquad \therefore\ G_0(\mathbf{p})=\frac{1}{p^2-k^2}$$

$G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$を求める

上半円でしか収束しない



$$G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{p}\,\frac{e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{p^2-k^2}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dp\,p^2\int_{-1}^{1}dz\cdot 2\pi\,\frac{e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|z}}{(p+k)(p-k)}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dp\,p^2\,\frac{e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}-e^{-ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\cdot\frac{1}{(p+k)(p-k)}$$

$e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$は上半円よりp=kを拾う
$e^{-ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$はp=-kを拾う

$$=\frac{1}{2(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dp\,\frac{p\left(e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}-e^{-ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)}{i|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\cdot\frac{1}{(p+k)(p-k)}$$

$$=\frac{2\pi i}{2(2\pi)^2}\cdot\frac{1}{i|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left[\frac{k\cdot e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{2k}+\frac{-k\,e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{-2k}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$\boxed{G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}$$